9.1 Uniformna i tačkasta konvergencija. Konvergencija skoro svuda i u srednjem redu.

Definicija 9.1. Neka je f_n, $n \in \mathbf{N}$, niz realnih funkcija na $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Za niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ kažemo da:

- (KU) *konvergira uniformno* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall n \geq N(\varepsilon))(\forall x \in X)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon);$$

- (KT) *konvergira tačkasto* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N})(\forall n \geq N(\varepsilon, x))(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon);$$

- (KSS) *konvergira skoro svuda* ka $f : X \to \mathbf{R}$, ako

$$(\exists M \in \mathcal{M})(\mu(M) = 0)(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in X \setminus M)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbf{N})$$
$$(\forall n \geq N(\varepsilon, x))(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon);$$

- (L^p) *konvergira u srednjem redu* p, $p \geq 1$, ka $f : X \to \mathbf{R}$, $f \in L^p(X)$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall n \geq N(\varepsilon))(\|f_n - f\|_p < \varepsilon)$$

▲

Jasno, $(KU) \Rightarrow (KT) \Rightarrow (KSS)$. Obrnute implikacije u opštem slučaju ne važe. Ipak, u slučaju kada je kardinalnost skupa X konačna, imamo da tačkasta konvergencija povlači uniformnu konvergenciju. Slično, u slučaju kada je prazan skup jedini skup mere nula, onda skoro-svuda konvergencija implicira tačkastu konvergenciju.

Kako je $L^p(X)$ kompletan, ako je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz iz $L^p(X)$ takav da za neku merljivu funkciju f važi
$\|f_n - f\|_p \to 0$ kad $n \to \infty$, sledi $f \in L^p(X)$.

Primer 9.1. Posmatrajmo prostor $\mathbf{R}$ sa Borelovom $\sigma-$ algebrom $\mathcal{B}$ i Lebegovom merom m. Niz $f_n = n^{-1/p}\kappa_{[0,n]}$, $n \in \mathbf{N}$, konvergira uniformno ka $f = 0$, ali ne konvergira u $L^p(\mathbf{R})$.

Međutim, uz dodatnu pretpostavku da je $\mu(X) < +\infty$, važi:

Propozicija 9.1. Neka je $\mu(X) < \infty$ i neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz u $L^p(X)$ koji uniformno konvergira ka f na X. Tada $f \in L^p(X)$ i $f_n \to f$ u $L^p(X)$, $n \to \infty$.